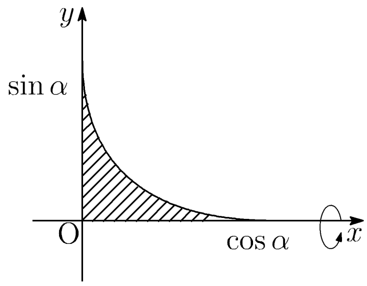
数　学(ⅠⅡⅢABC)　解答例

大阪公立大学	2026 年度	一般選抜前期日程	2026 年 2 月 25 日実施

第1問

問1　$\sqrt{\dfrac{x}{\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{y}{\sin\alpha}}=1\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$



$\sqrt{\dfrac{y}{\sin\alpha}}=1-\sqrt{\dfrac{x}{\cos\alpha}}\geqq 0$ より

$\sqrt{\dfrac{x}{\cos\alpha}}\leqq 1,\quad 0\leqq x\leqq\cos\alpha$

$\sqrt{\dfrac{x}{\cos\alpha}}=1-\sqrt{\dfrac{y}{\sin\alpha}}\geqq 0$ より

同様に，$0\leqq y\leqq\sin\alpha$

$y=\sin\alpha\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{\cos\alpha}}\right)^2$

$V(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\cos\alpha}\pi\left\{\sin\alpha\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{\cos\alpha}}\right)^2\right\}^2dx=\pi\sin^2\alpha\int_0^{\cos\alpha}\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{\cos\alpha}}\right)^4dx$

$t=1-\sqrt{\dfrac{x}{\cos\alpha}}$ とおくと，$\sqrt{x}=\sqrt{\cos\alpha}(1-t)$

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=-\sqrt{\cos\alpha}\,dt$

$dx=-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\cos\alpha}\,dt=-2(\cos\alpha)(1-t)dt$

$x\ :\ 0\to\cos\alpha$ のとき，$t\ :\ 1\to 0$

よって，t で置換すると

$$
\begin{aligned}
V(\alpha)&=\pi\sin^2\alpha\int_1^0 t^4\cdot(-2\cos\alpha)(1-t)\,dt\\
&=2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha\int_0^1 t^4(1-t)dt\\
&=2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^6}{6}\right]_0^1\\
&=\frac{1}{15}\pi\sin^2\alpha\cos\alpha
\end{aligned}
$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$(答)

問2　$V(\alpha)=\dfrac{1}{15}\pi\sin^2\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{15}\pi(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$u=\cos\alpha$ とおくと

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ において，$0<u<1$

$f(u)=(1-u^2)u=u-u^3$ とおくと

$f'(u)=1-3u^2$

u	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		$\nearrow$		$\searrow$	

右の増減表より，$u=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，最大値 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ をとる。

ゆえに，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$V(\alpha)$ は最大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{135}\pi$ をとる。　$\cdots\cdots\cdots\cdots$(答)

第2問

1, 2 の目が a 回，3, 4 の目が b 回，5, 6 の目が c 回 出るとする。

このとき，$p=a,\ q=b-c,\ a+b+c=6$ である。

問1　$p=3$ のとき，$a=3,\ b+c=3$ より，$p=3$ となる確率を p_1 とすると

$$p_1 = {}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{160}{729} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

問2　$q=b-c=1,\ 0 \leqq b+c \leqq 6$ より，$(b,\ c)=(1,\ 0),\ (2,\ 1),\ (3,\ 2)$

よって，$(a,\ b,\ c)=(5,\ 1,\ 0),\ (3,\ 2,\ 1),\ (1,\ 3,\ 2)$

$q=1$ となる確率を p_2 とすると

$$p_2 = \left(\frac{6!}{5!\,1!\,0!}+\frac{6!}{3!\,2!\,1!}+\frac{6!}{1!\,3!\,2!}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$= \frac{6+60+60}{3^6} = \frac{14}{81} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

問3　$3p+2q=3a+2b-2c,\ a+b+c=6$ より，$b=6-a-c$ から，$3p+2q=a-4c+12$

$8 \leqq 3p+2q \leqq 10$ より，$3p+2q=8,\ 9,\ 10$

(i)　$3p+2q=8$ のとき，$a-4c+12=8$ より，$a=4c-4$

$0 \leqq a \leqq 6,\ 0 \leqq a+c \leqq 6$ より，$c=1,\ 2$

$c=1$ のとき，$a=0,\ b=5$,　$c=2$ のとき，$a=4,\ b=0$

よって，$(a,\ b,\ c)=(0,\ 5,\ 1),\ (4,\ 0,\ 2)$

(ii)　$3p+2q=9$ のとき，$a-4c+12=9$ より，$a=4c-3$

$0 \leqq a \leqq 6,\ 0 \leqq a+c \leqq 6$ より，$c=1$

$c=1$ のとき，$a=1,\ b=4$

よって，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 4,\ 1)$

(iii)　$3p+2q=10$ のとき，$a-4c+12=10$ より，$a=4c-2$

$0 \leqq a \leqq 6,\ 0 \leqq a+c \leqq 6$ より，$c=1$

$c=1$ のとき，$a=2,\ b=3$

よって，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 1)$

$8 \leqq 3p+2q \leqq 10$ となる事象を A，$p=2$ となる事象を B とおくと，

求める確率は $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$$P(A)=\left(\frac{6!}{0!\,5!\,1!}+\frac{6!}{4!\,0!\,2!}+\frac{6!}{1!\,4!\,1!}+\frac{6!}{2!\,3!\,1!}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{6+15+30+60}{3^6}=\frac{111}{3^6}$$

$$p(A\cap B)=\frac{6!}{2!\,3!\,1!}\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{60}{3^6}$$

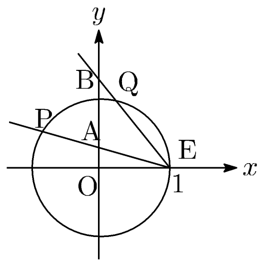
ゆえに，$P_A(B)=\dfrac{60}{111}=\dfrac{20}{37}$ $\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$

第3問

問1 直線EAの方程式は $y=-s(x-1)$

円 $x^2+y^2=1$ と連立すると,

$$x^2+s^2(x-1)^2=1$$
$$(x-1)\{(s^2+1)x-s^2+1\}=0$$
$$x=1,\ \frac{s^2-1}{s^2+1}$$



PはEと異なる点より, x 座標は $x=\dfrac{s^2-1}{s^2+1}$

$y=-s\left(\dfrac{s^2-1}{s^2+1}-1\right)=\dfrac{2s}{s^2+1}$

よって, $\mathrm{P}\left(\dfrac{s^2-1}{s^2+1},\ \dfrac{2s}{s^2+1}\right)$ …………(答)

問2 問1と同様にして, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1},\ \dfrac{2t}{t^2+1}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=(-1,\ s)$

$\mathrm{EP}\perp\mathrm{OQ}$ のとき, $\mathrm{EA}\perp\mathrm{OQ}$

$$\overrightarrow{\mathrm{EA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\frac{t^2-1}{t^2+1}+\frac{2t}{t^2+1}s=0$$
$$-t^2+1+2ts=0$$
$$t^2-2st-1=0$$
$$t=s\pm\sqrt{s^2+1}$$

$t>s$ より, $t=s+\sqrt{s^2+1}$ …………(答)

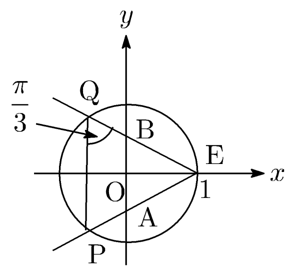
問3 $\mathrm{EP}\perp\mathrm{OQ}$ のとき, EPとOQはEPの中点Mで交わる。

$\mathrm{OM}\perp\mathrm{EP}$ であるから, $\mathrm{QM}\perp\mathrm{EP}$

したがって,

$\triangle\mathrm{EPQ}$ は $\mathrm{QE}=\mathrm{QP}$ の二等辺三角形である。

さらに, $\angle\mathrm{EQP}=\dfrac{\pi}{3}$ より, $\triangle\mathrm{EPQ}$ は正三角形である。



$s<t$ であるから, $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\dfrac{s^2-1}{s^2+1}=-\dfrac{1}{2}$ より, $s^2=\dfrac{1}{3}$,　同様に, $t^2=\dfrac{1}{3}$

$s<t$ より, $s=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ …………(答)

第4問

問1

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2}$$

$$=\frac{4}{\sin^2\theta}$$

よって, 与式は成り立つ。(証明終わり)

問2 問1の式より,

$$\frac{4}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)}=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{2^{n+2}}\pi\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{2^{n+2}}\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{2^{n+2}}\pi\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)+2^{n+1}}{2^{n+2}}\pi\right)}$$

$$\sum_{k=1}^{2^n}\frac{4}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)}=\sum_{k=1}^{2^n}\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{2^{n+2}}\pi\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)+2^{n+1}}{2^{n+2}}\pi\right)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{2^{n+1}}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{2^{n+2}}\pi\right)}$$

$$4S_n=S_{n+1}$$

$$S_1=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3}{4}\pi}=2+2=4$$

したがって, $S_n=4\cdot 4^{n-1}=4^n$ …………(答)

問 3　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\dfrac{1}{\sin^2\theta} - 1 < \dfrac{1}{\theta^2} < \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

この式に $\theta = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi \quad (1 \leqq k \leqq 2^{n-1})$ を代入すると

$$\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)} - 1 < \frac{1}{\left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)^2} < \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)}$$

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)} - 1\right\} < \sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)^2} < \sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)} \quad \cdots ①$$

$\sin\left(\pi - \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right) = \sin\dfrac{2^{n+1}-(2k-1)}{2^{n+1}}\pi = \sin\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi$ であり,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{2^{n+1}-(2k-1)}{2^{n+1}}\pi\right)}\right\} = S_n$ であるから,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\pi\right)} = \frac{1}{2}S_n$

① より

$$\frac{1}{2}S_n - 2^{n-1} < \frac{2^{2n+2}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)^2} < \frac{1}{2}S_n$$

$$\frac{1}{2}\cdot 4^n - 2^{n-1} < \frac{2^{2n+2}}{\pi^2}T_n < \frac{1}{2}\cdot 4^n$$

$$\left\{\frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right\}\pi^2 < T_n < \frac{1}{8}\pi^2$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right\}\pi^2 = \frac{1}{8}\pi^2$

はさみうちの原理より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n = \frac{1}{8}\pi^2$ …………(答)