2023年12月19日

雑誌ShinRo冬号について【訂正とお詫び】

雑誌「ShinRo 冬号」の掲載内容に一部誤りがありましたので下記の通り訂正させていただきます。
生徒の皆さまにご迷惑をおかけしましたことを深くお詫びいたします。

記

P21　阪大文系数学はこう解く！

訂正箇所

・この問題の解き方のポイント

・解答

※訂正後の内容につきましては別紙、修正版をご確認ください。

夕陽丘予備校/全国進路研究所

大阪大学 文系 第 2 問

正の実数 a, x に対して,

$$y = \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^3 + a\left(\log_{\sqrt{2}} x\right)\left(\log_4 x^3\right)$$

とする.

(1) $t = \log_2 x$ とするとき,y を a, t を用いて表せ.

(2) x が $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ の範囲を動くとき,y の最大値 M を a を用いて表せ.

この問題の取り組み方

3 次関数の最大値を求める問題である。2 次関数と違い,3 次関数の最大・最小の場合分けには公式的なものがなく,a の値を小さい方から大きい方に動かしながら,最大値をとる x の値が変化するところをしっかり捉えて適切に場合分けをしたい。

この問題の解き方のポイント

(1) は,$\log_2 x$ を t とおく。その際,

$$b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0,\ m : \text{実数} \text{ のとき } \log_{b^m} x^n = \frac{n}{m}\log_b x$$

を用いることも出来る。

(2) は $-1 \leqq t \leqq 3$ の範囲において,$y = -t^3 + 3at^2$ の最大値を求める。

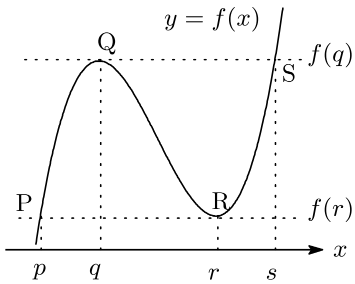
$$y' = -3t(t-2a)$$

であるから,$a \neq 0$ のときは極値をもつ。大まかには,極値の t 座標の一方の $2a$ について,

$$0 < 2a \leqq 3,\ 3 < 2a$$

の 2 つの場合分けになる。ただ,最大値の候補が 2 個になることがあるので,あらかじめ,極大値と同じ y 座標をもつ点の t 座標を求めておくとよい。その際に,下のような性質がある。

3 次関数 $f(x) = ax^3 + \cdots\cdots \quad (a \neq 0)$ が,$x = q,\ r \quad (q < r)$ で極値をもつとする。
$y = f(x)$ のグラフ上の 4 点 $\mathrm{P}(p,\ f(r))$, $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$, $\mathrm{R}(r,\ f(r))$, $\mathrm{S}(s,\ f(q))$ について,
$(q-p):(r-q):(s-r) = 1:2:1$ が必ず成り立つ。



$\boxed{\text{解答}}$

(1)
$$\begin{aligned} y &= (-\log_2 x)^3 + a\,(2\log_2 x)\left(\frac{3}{2}\log_2 x\right) \\ &= \boldsymbol{-t^3+3at^2} \end{aligned}$$

(2) $f(t) = -t^3 + 3at^2$ とおく。

$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 8 \iff \log_2 \frac{1}{2} \leqq \log_2 x \leqq \log_2 8 \iff -1 \leqq t \leqq 3$$

である。また，

$$f'(t) = -3t^2 + 6at = -3t(t-2a)$$

であり，$a > 0$ なので，$f(t)$ は

$$\text{極大値 } f(2a) = 4a^3,\ \text{極小値 } f(0) = 0$$

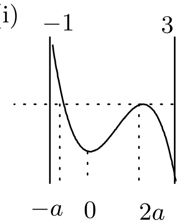
をとる。さらに，

$$f(t) = f(0) \iff t^2(t-3a) = 0 \qquad \therefore\ t = 0,\ 3a$$
$$f(t) = f(2a) \iff (t-2a)^2(t+a) = 0 \qquad \therefore\ t = -a,\ 2a$$

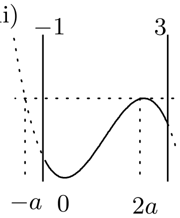
である。

最大値は，極大値である $f(2a)$ か，端点の $f(-1)$，$f(3)$ でとる。$2a$ と 3 の大小，および，$f(2a) = f(-a)$ より $-a$ と -1 の大小で，最大値をとる t の値が変化する。

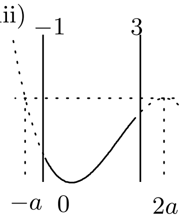
(i)



(ii)



(iii)



(i) $2a < 3$ かつ $-1 < -a$ つまり $0 < a < 1$ のとき

$$M = f(-1) = 3a + 1$$

(ii) $2a \leqq 3$ かつ $-a \leqq -1$ つまり $1 \leqq a \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき

$$M = f(2a) = 4a^3$$

(iii) $3 < 2a$ かつ $-a < -1$ つまり $\dfrac{3}{2} < a$ のとき

$$M = f(3) = 27a - 27$$

(i), (ii), (iii) より，

$$\boldsymbol{M = \begin{cases} 27a - 27 & \left(\dfrac{3}{2} < a \text{ のとき}\right) \\ 4a^3 & \left(1 \leqq a \leqq \dfrac{3}{2} \text{ のとき}\right) \\ 3a + 1 & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \end{cases}}$$